

1. On a $M^1 = M$ qui est la matrice d'adjacence du graphe.

Par définition, son coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne donne le nombre de chaînes de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j .

2. a. On a $M^{p+1} = M^p \times M$.

Ainsi, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on a $c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n b_{i,\ell} a_{\ell,j}$.

- b. $b_{i,\ell}$ donne le nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i et ℓ .

$a_{\ell,j}$ donne le nombre de chaînes de longueur 1 reliant les sommets ℓ et j .

- c. Pour tout $\ell \in \{1; \dots; n\}$, $a_{\ell,j}$ vaut 1 si les sommets ℓ et j sont adjacents et 0 sinon. Ainsi, $b_{i,\ell} \times a_{\ell,j}$ vaut $b_{i,\ell}$ si les sommets ℓ et j sont adjacents et 0 sinon. Cela correspond au nombre de chaînes de longueur $p + 1$ reliant le sommet i au sommet j pour lesquelles la dernière arête relie le sommet ℓ au sommet j .

Ainsi, $\sum_{\ell=1}^n b_{i,\ell} a_{\ell,j}$ correspond au nombre de chaînes de longueur $p + 1$ reliant le sommet i au sommet j .

3. Ainsi, la propriété est vraie pour $k = 1$ et, si il existe un entier naturel non nul p quelconque tel que la propriété est vraie au rang p , alors elle est également vraie pour $p + 1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie. Ainsi, le terme de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de M^k donne le nombre de chemins de longueur k reliant le sommet i au sommet j .